# «ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο»

Ασκηση 1η

Ⓐ Έστω τα ενδεχόμενα A, B με $P(A) = P(B) = \frac{2}{5}$ και $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$.
Να βρείτε την $P(A \cap B)$

Ⓑ Έστω τα ενδεχόμενα A, B με $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$
Να βρείτε την $P(B)$.

Ασκηση 2η

Εάν A, B ανεξάρτητα ενδεχόμενα, νδο τα συμπληρωματικά ενδεχόμενα $A^c$, $B^c$ είναι επίσης ανεξάρτητα

Ασκηση 3η

Έστω σε ένα ορεινό χωριό το 40% των κατοίκων είναι άνδρες και το 60% γυναίκες. Έστω ακόμα ότι το 50% των ανδρών και το 30% των γυναικών είναι ορειβάτες

Ⓐ Να βρείτε την πιθανότητα ένα τυχαίο άτομο να είναι ορειβάτης

Ⓑ Δεδομένου ότι ένα άτομο είναι ορειβάτης, ποια η πιθανότητα να είναι άνδρας

Ασκηση 4η

Σε ένα εργοστάσιο υπάρχουν δυο μηχανές A και B που κατασκευάζουν το 40% και το 60% των προϊόντων αντίστοιχα. Είναι γνωστό ότι το 2% και το 3% των προϊόντων που δημιουργούνται από τις A και B αντίστοιχα είναι ελαττωματικά

Ⓐ Να βρείτε την πιθανότητα το τυχαίο προϊόν που θα επιλέξουμε να είναι ελαττωματικό

Ⓑ Αν επιλέξουμε τυχαία ένα προϊόν και δούμε πως είναι ελαττωματικό, ποια η πιθανότητα να το έφτιαξε η μηχανή A;

Ασκηση 5η

Η πιθανότητα ύπαρξης ενός μετάλλου A σε ένα μετάλλευμα είναι 0.4 , ένω ενός άλλου μετάλλου B είναι 0.55 Επίσης, είναι γνωστό ότι με δεδομένη την ύπαρξη του μετάλλου A στο μετάλλευμα , η πιθανότητα υπαρξης του μετάλλου B είναι 0.80.

Ⓐ Να βρείτε την πιθανότητα υπαρξης ενός τουλάχιστον απο τα μεταλλα A και B.

Ⓑ Να βρείτε την πιθανότητα ωστε κανένα απο τα A και B να μην υπάρχει στο μετάλλευμα.

Ασκηση 6η

Να βρείτε την πιθανότητα των ακόλουθων συνδιασμών στο Poker (καθε παιχτης παιρνει 5 φύλλα από τα 52 της τράπουλας)

Ⓐ Καρέ (4 ιδια), δηλαδή (x, x, x, x, y)

Ⓑ Φουλ (3 ιδια και 2 ιδια), δηλαδή (x, x, x, y, y)

Ⓖ Δύο ζεύγη , δηλαδή (x, x, y, y, z)

Ⓓ Ένα ζεύγος, δηλαδή (x, x, y, z, w)

Ασκηση 7η

Ένα κουτί εχει 40 λειτουργικες και 10 ελαττωματικες λαμπες Αν τραβήξουμε 10 στην τύχη , ποια η πιθανοτητα και οι 10 να είναι λειτουργικες;

Ασκηση 8η

Ⓐ Ποια η πιθανότητα σε μια ταξη 50 μαθητών , οι δυο τουλάχιστον να εχουν γενεθλια την ίδια μερα;

Ⓑ Πόσοι αναγραμματισμοί της λέξης KAPABAKI υπάρχουν;

Ⓖ Αν παίζουμε μια στήλη (6 αριθμοί) στο ΛΟΤΤΟ (49 αριθμοί) πόια η πιθανότητα να πιάσουμε τουλάχιστον 4 αριθμους;

Ασκηση 9η

Σε ένα κουτί υπάρχουν 10 κόκκινες και 8 άσπρες σφαίρες

α) Τραβάμε διαδοχικά 2 σφαίρες. Ποια η πιθανότητα να είναι και οι 2 κόκκινες, εάν τραβάμε:

Ⓐ με επανατοποθέτηση

Ⓑ χωρίς επανατοποθέτηση

β) Τραβάμε διαδοχικά 5 σφαίρες. Ποια η πιθανότητα να είναι οι 3 κοκκινες και οι 2 άσπρες, εάν τραβάμε:

Ⓐ με επανατοποθέτηση

Ⓑ χωρίς επανατοποθέτηση.

Ασκηση 10η

Ⓐ Ένα παιδί έχει αγοράσει 3 λαχνούς σε μια λοταρία για την οποία έχουν πουληθεί ν λαχνοί και θα δοθούν 5 βραβεία Ποια η πιθανότητα να κερδίσει τουλάχιστον ένα βραβείο

Ⓑ Οι 90 μαθητές της 6ης δημοτικού θα χωριστούν του χρόνου με εντελώς τυχαίο τρόπο σε τρία τμήματα απο 30 μαθητές το καθένα. Να βρεθεί η πιθανότητα ο Αλέξης, ο Γιαννης και ο Νικος που είναι αχώριστοι φίλοι να βρεθούν τελικά σε διαφορετικό τμήμα ο καθένας.

# «ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο»

## (ΛΥΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ)

### Άσκηση 1η

Ⓐ $P(A)=P(B)=\frac{2}{5}$ και $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{2}{5}+\frac{2}{5}-P(A\cap B) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{4}{5}-P(A\cap B) \Rightarrow P(A\cap B)=\frac{4}{5}-\frac{1}{2} \Rightarrow P(A\cap B)=\frac{3}{10}$$

Ⓑ $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$ και $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$

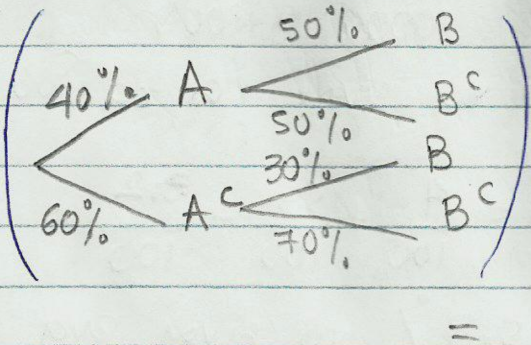
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{3}+P(B)-\frac{1}{4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3} \Rightarrow P(B)=\frac{6}{12}+\frac{3}{12}-\frac{4}{12} \Rightarrow P(B)=\frac{5}{12}$$

### Άσκηση 2η

A, B ανεξάρτητα $\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$, καθώς
ΘΔΟ $A^c, B^c$ ανεξάρτητα
Αρκεί νδο $P(A^c\cap B^c)=P(A^c)\cdot P(B^c)=(1-P(A))(1-P(B))$
Γενικά, $P(A^c\cap B^c)\overset{D'Morgan}{=}P\left[(A\cup B)^c\right]=1-P(A\cup B)=$
$=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)=$
$=1-P(A)-P(B)+P(A)\cdot P(B)=$
$=(1-P(A))\cdot(1-P(B))$.

### Άσκηση 3η

Έστω τα ενδεχόμενα: $A=\{$άνδρας$\}$ και $B=\{$ορειβάτης$\}$




Από Θ.ο.π.

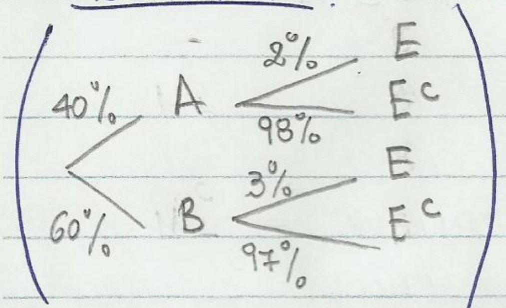
Ⓐ $P(B)=\frac{40}{100}\cdot\frac{50}{100}+\frac{30}{100}\cdot\frac{70}{100}=\frac{38}{100}$

Bayes.

Ⓑ $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B|A)\cdot P(A)}{P(B)}=$

$$=\frac{\frac{40}{\cancel{100}}\cdot\frac{50}{\cancel{100}}}{\frac{38}{\cancel{100}}}=\frac{20}{38}$$

## Ασκηση 4η




Ⓐ Εστω τα ενδεχομενα
A={Το προϊόν να παράγεται απο την A}
E={το προϊόν να είναι ελαττωματικό}

Από Θ.ο.π.

$$P(E) = \frac{40}{100}\cdot\frac{2}{100} + \frac{60}{100}\cdot\frac{3}{100} =$$

$$= \frac{80}{10000} + \frac{180}{10000} = \frac{260}{10000} = \frac{26}{1000}$$

δηλ. το 2,6% υπαρχει πιθανότητα να είναι ελαττωματικό

Bayes

Ⓑ $$P(A|E) = \frac{P(A\cap E)}{P(E)} = \frac{P(E|A)\cdot P(A)}{P(E)} = \frac{\frac{2}{\cancel{100}}\cdot\frac{40}{\cancel{100}}}{\frac{26}{\cancel{1000}}} = \frac{8}{26}$$

## Ασκηση 5η

Εστω τα ενδεχόμενα:
A={να υπαρχει το A} και B={να υπαρχει το B}

$P(A) = \frac{4}{100}$ και $P(B) = \frac{55}{100}$

Ενω,

$$P(B/A) = \frac{80}{100}$$ ← Δεδομενου A ισχυει το B.

Ⓐ $$P(B|A) = \frac{80}{100} \Rightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{80}{100} \Rightarrow \frac{P(A\cap B)}{4/100} = \frac{80}{100} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A\cap B) = \frac{4\cdot 80/100}{100} = \frac{4\cdot 80}{100\cdot 100} = \frac{320}{10000} = \frac{32}{1000}$$

Αρα, ενα 3.2% πιθανοτητα να είναι και τα δυο

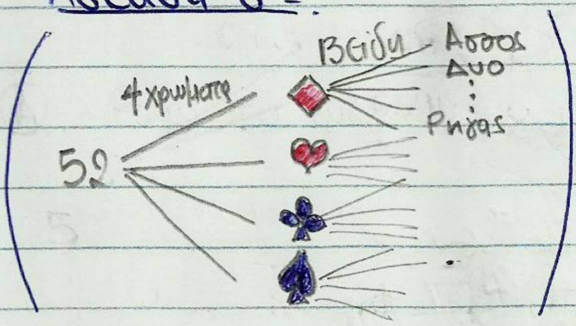
Αλλα, $$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = \frac{4}{100} + \frac{55}{100} - \frac{3.2}{100} =$$

$$= \frac{59-3.2}{100} = \frac{55.8}{100}$$ ~> 55.8% να είναι ενα τουλάχιστον απο τα δυο μεταλλα

(B) $P((A\cup B)^c) = 1 - P(A\cup B) = 1 - \frac{55.8}{100} = \frac{100-55.8}{100} = \frac{54.2}{100}$

⇝ Άρα, 54.2% η πιθανότητα κανένα απο τα A και B μετάλλα να είναι στο μετάλλευμα.

**Άσκηση 6η:**




(A) Έστω το ενδεχόμενο $A = \{$καρέ (ίδιου είδους)$\}$

$$P(A) = \frac{\|A\|}{\|S\|} = \frac{2\times\binom{13}{2}\times\binom{4}{4}\times\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}}$$ ← Δυνατές περιπτώσεις

- το $\binom{13}{2}$ ⇝ 2 είδη απο τα 13 διοτί $(x,x,x,x,y)$
- το $\binom{4}{4}$ ⇝ 4 είδη απο τα 4 χρώματα
- το $\binom{4}{1}$ ⇝ 1 χρώμα απο τα 4 χρώματα

(B) Έστω το ενδεχόμενο $B = \{$φουλ (3 ίδια και 2 ίδια)$\}$

$$P(B) = \frac{\|B\|}{\|S\|} = \frac{2\times\binom{13}{2}\times\binom{4}{3}\times\binom{4}{2}}{\binom{52}{5}}, \quad (x,x,x,y,y)$$

- $\binom{4}{3}$ ⇝ 3 είδη από τα 4 χρώματα
- $\binom{4}{2}$ ⇝ 2 είδη από τα 4 χρώματα

Ⓑ Εστω το ενδεχομενο Γ={ Ενα Ζευγος }

$$P(\Gamma) = \frac{\|\Gamma\|}{\|S\|} = \frac{4 \times \binom{13}{4} \times \binom{4}{2} \times \binom{4}{1}^3}{\binom{52}{5}}$$

$(x, x, y, z, w)$

- $\binom{13}{4} \rightsquigarrow$ 4 είδη απο τα 13
- $\binom{4}{2} \rightsquigarrow$ 2 είδη απο τα 4 χρωματα
- $\binom{4}{1}^3 \rightarrow$ 3 είδη απο τα 4 χρωματα

Ⓖ Εστω το ενδεχόμενο Δ={ 2 Ζευγη }

$$P(\Delta) = \frac{\|\Delta\|}{\|S\|} = \frac{3 \times \binom{13}{3} \times \binom{4}{2}^2 \times \binom{4}{1}}{\binom{52}{3}}$$

$(x, x, y, y, z)$

- $\binom{13}{3} \rightsquigarrow$ 3 απο τα 13 ειδη
- $\binom{4}{2}^2 \rightsquigarrow$ 2 είδη απο τα 4 χρωματα
- $\binom{4}{1} \rightsquigarrow$ 1 είδος απο τα 4 χρώματα

Ασκηση 7η

ΑΘΡ = 40 + 10 = 50 λαμπες

$\|S\| = \binom{50}{10}$ και Α ενδεχομενο : Α={ 10 λειτουργουν }

$$P(A) = \frac{\|A\|}{\|S\|} = \frac{\binom{40}{10}}{\binom{50}{10}} = \frac{\frac{40!}{10!\,30!}}{\frac{50!}{10!\cdot 40!}} = \frac{40!\,40!}{30!\cdot 50!}$$

## Άσκηση $8^{η}$

(Α) Εάν το ενδεχόμενο $A=\{$οι 2 από τους 50 μαθητές να έχουν γενέθλια ίδια μέρα$\}$

προφανώς λόγω μεγάλου πλήθους, παίρνουμε το συμπλήρωμα όπου $A^c=\{$κανένας να μην έχει γεννηθεί ίδια μέρα$\}$

$$P(A^c)=1-P(A) \Rightarrow P(A)=1-P(A^c)=1-\frac{\|A^c\|}{\|S\|}=1-\frac{316}{365^{50}}.$$

όπου:

Μαθ1 Μαθ2 ... Μαθ50 (Πολ/σιακή αρχή)

$$\underset{\text{τρόπους}}{365} \times \underset{\text{τρόπους}}{365} \times \dots \times \underset{\text{τρόπους}}{365} = 365^{50} = \|S\|$$

και αφού ζητάμε το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων (όλοι να έχουν γεννηθεί διαφορετική μέρα)

Μαθ1 Μαθ2 ... Μαθ50

$$\underset{\text{τρόπους}}{(365)} \times \underset{\text{τρόπους}}{(364)} \times \dots \times \underset{\text{τρόπους}}{(365-(50-1))} = \underset{\text{τρόπους}}{316}$$

(Β) Προφανώς κάναμε χρήση πολυωνυμικού συντελεστή διότι έχουμε κάποια γράμματα παραπάνω από μια φορά στη λέξη ΚΑΡΑΒΑΚΙ.

$Γ_1 = 2$ φορές
$Γ_2 = 3$ φορές
$Γ_3 = 1$ φορά
$Γ_4 = 1$ φορά
$Γ_5 = 1$ φορά

Άρα, οι αναγραμματισμοί που υπάρχουν, είναι:

$$\left(\frac{8!}{3!2!1!1!1!}\right)=\frac{8!}{3!\cdot 2!}=\frac{48\cdot\cancel{20}\cdot\cancel{42}}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}}=$$

$$=48\cdot 5\cdot 14=3360.$$

Γ) Έστω $B$ το ενδεχόμενο, τέτοιο ώστε:

$B = \{$ πιάνουμε τουλάχιστον 4 αριθμούς $\} = \{ x \geq 4 \}, x \in \mathbb{N}$

Ενώ, $B^c = \{$ πιάνουμε το πολύ 3 αριθμούς $\} = \{ x < 4 \}, x \in \mathbb{N}$

$$P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - \frac{\|B\|}{\|S\|} =$$

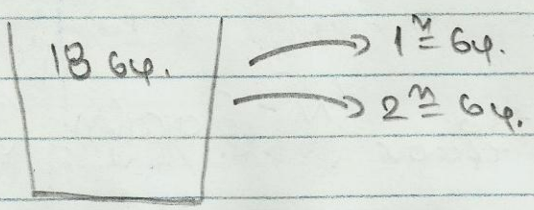
$$= 1 - \frac{\left( \binom{6}{1} \cdot \binom{43}{5} + \binom{6}{2} \cdot \binom{43}{4} + \binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3} \right)}{\binom{49}{6}}$$

το πολύ 3 αριθμοί είναι: "ένας" ή "δύο" ή "τρεις"
Εάν τώρα πιάσουμε 1 από τους 6 τότε ταυτόχρονα <u>δεν</u> θα έχουμε πιάσει 5 από τους 43 .... κλπ.

<u>Άσκηση 9η</u>

ΑΘΡ = 10 + 8 = 18 συνολικά σφαίρες στο κουτί

α)




Α) Έστω ενδεχόμενο $A = \{$ 2 κοκ. με επανατοποθέτηση $\}$

Β) Έστω ενδεχόμενα $B_1 = \{$ 1η κοκ. δίχως επανατοποθέτηση $\}$
και $B_2 = \{$ 2η κοκ. δίχως επανατοποθέτηση $\}$.

$$P(B_1 \cap B_2) = \frac{10}{18} \cdot \frac{9}{17} = \frac{\cancel{2} \cdot 5}{3 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3} \cdot 3}{17} = \frac{15}{51}$$

β) Ⓐ Έστω το ενδεχόμενο $\Gamma = \{$3 κοκ. & 2 Ασπρ. με επανατοποθ.$\}$

Ⓑ Έστω τα ενδεχόμενα $\Delta_1 = \{$

**Άσκηση 10η**

Ⓐ Η πιθανότητα να κερδίσει τουλάχιστον ένα βραβείο είναι δύσκολο να βρεθεί με τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας. Παίρνοντας την άρνηση του παραπάνω ενδεχομένου (έστω A)
-Άρα, από τις ιδιότητες των πιθανοτήτων έχουμε:
(για $A^c = \{$να μην κερδίσει τίποτα$\}$)

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{\|A^c\|}{\|S\|} = 1 - \frac{\binom{n-3}{0}}{\binom{n}{5}}$$

Ⓑ Έστω $A = \{$Αλέξης, Γιάννης, Νίκος σε διαφορετικά τμήματα$\}$
Αφού, θα χωριστούν συνολικά τα 90 παιδιά σε 3 τμήματα (ίσα) τότε $\|S\| = \binom{90}{30} \times \binom{60}{30} \times \binom{30}{30}$
(ή και μέσω πολυων. συντελεστή)
Δηλ.,

$$\|S\| = \binom{90}{30\ 30\ 30}. \quad \text{Ενώ} \quad \|A\| = 3! \times \binom{29}{3} \times \binom{28}{3} \times \binom{27}{3}$$

Άρα,

$$P(A) = \frac{\|A\|}{\|S\|} = \frac{3! \times \binom{29}{3} \times \binom{28}{3} \times \binom{27}{3}}{\binom{90}{30} \times \binom{60}{30} \times \binom{30}{30}}.$$